Кратные нуль-ряды по системе Уолша, M- и U- множества

Казакова А.Д.

Научная конференция

"Дни анализа в Сириусе: аппроксимация, оптимизация, восстановление данных и смежные вопросы"

Сириус, 2025 г.

(Д.Е. Меньшов, 1916) *Существует тригонометрический ряд сходящийся к нулю в* $(0, 2\pi)$ *за исключением совершенного множества меры нуль и содержащий бесконечно много ненулевых коэффициентов.*

Конструкция Меньшова: На k-ом шаге построения совершенного множества в каждом из 2^{k-1} оставшихся отрезков удаляем по концентрическому интервалу длиной в $\frac{1}{k+1}$ длины этого отрезка.

Симметричное совершенное множество с переменным отношением

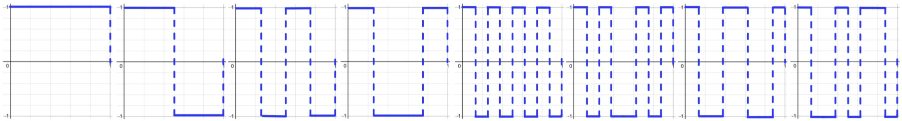
Определения

Нуль-рядом по некоторой системе функций называется нетривиальный ряд, который почти всюду сходится к 0.

Множество A называется *M-множеством* для рядов по некоторой системе функций, если существует ряд по этой системе, не все коэффициенты которого нулевые, сходящийся к нулю вне множества A.

Система *функций Уолша* определяется через систему *функций Радемахера* $R_k(x) = (-1)^m,\ x \in [\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}),\ (k = 0,\ 1\ldots)$ равенствами

$$W_0(x) = 1, \quad W_n(x) = \prod_{k=0}^{H(n)} R_k^{n_k}(x), \quad n = \sum_{k=0}^{H(n)} n_k 2^k, \quad x \in [0, 1).$$



Введение

Существование M-множеств нулевой меры для системы Уолша доказано в работах А.А. Шнейдера, J.E. Coury, F. Schipp.

Первая конструкция M-множества нулевой меры для системы Уолша предложена В.А. Скворцовым (M-множество определяется индуктивно как пересечение вложенной последовательности множеств, где каждое множество является линией уровня 1 некоторого полинома Уолша.)

Пусть $h(t)$ – определенная на $[0, +\infty)$ неотрицательная неубывающая функция, для которой $h(0+) = h(0) = 0$. Тогда будем говорить, что h-мера некоторого множества E равна нулю, или $\mu_h E = 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая система отрезков $\{v_s\}$, что $E \subset \bigcup v_s$ и $\sum_s h(|v_s|) < \varepsilon$.

(В.А. Скворцов, 1977) *Для любой функции* $h(t)$ *существует совершенное множество* $E \subset [0, 1]$, *у которого* $\mu_h E = 0$ *и которое является* M-*множеством для системы Уолша.*

Для тригонометрической системы аналогичная теорема была доказана О.С. Ивашовым-Мусатовым, 1968.

Введение

(Г.Г. Геворкян, 1988) *Пусть* $\varepsilon_n \downarrow 0$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 = +\infty$. *Тогда существует множество* $E \subset [0,1]$ *с* $\mu E = 0$ *такое что:*
1. Существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(t)$ *с коэффициентами* $|a_n| \le \varepsilon_n$, *который сходится к нулю всюду вне* E *и* $\sum |a_n| > 0$.
2. Если $|b_n| = o(\varepsilon_n)$ *и ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(t)$ *сходится к нулю всюду вне* E, *то* $b_n = 0$ *для всех* n.

В этой же работе Г.Г. Геворкяном получена похожая теорема для тригонометрических рядов.

Кратные ряды. Виды сходимостей.

$S_{\mathbf{N}}(\mathbf{g}) := \sum\limits_{\mathbf{n}<\mathbf{N}} a_{\mathbf{n}} W_{\mathbf{n}}(\mathbf{g}), \quad \mathbf{N} \in \mathbb{N}^d$ — прямоугольные частичные суммы

Сходимость по прямоугольникам:
$\lim S_{\mathbf{N}}(\mathbf{g}) = S$ при $\min\{N^1, \dots, N^d\} \to \infty$

Сходимость по кубам:
$\lim_{N\to\infty} S_{N\cdot\mathbf{1}}(\mathbf{g}) = S$

λ-сходимость ($\lambda > 1$):
$\lim S_{\mathbf{N}}(\mathbf{g}) = S$ при $\min\{N^1, \dots, N^d\} \to \infty$ и $\max\limits_{j,k} N^j/N^k \le \lambda$

Повторная сходимость:

$$\sum_{n^{j_1}\in\mathbb{N}_0} \left(\sum_{n^{j_2}\in\mathbb{N}_0} \left(\dots \left(\sum_{n^{j_d}\in\mathbb{N}_0} a_{\mathbf{n}} W_{\mathbf{n}}(\mathbf{g}) \right)\right)\right) = S$$

Как легко получить многомерные нуль-ряды?

$\sum\limits_n a_n\phi_n(x_1)$ и $\sum\limits_m b_m\phi_m(x_2)$ — одномерные нуль-ряды,
E_1 и E_2 — соответствующие M-множества.
Тогда двойной ряд $\sum\limits_{n,m} a_n b_m \phi_n(x_1)\phi_m(x_2)$ является нуль-рядом по системе $\{\phi_n(x_1)\phi_m(x_2)\}$ при сходимости по прямоугольникам или кубам, а $(E_1 \times [0,1]) \cup ([0,1] \times E_2)$ — M-множество.

(С.Ф. Лукомский, 1989) *Пусть* $E \subset [0,1)^{d-1}$, $d \geq 2$. *Множество* $E \times [0,1)$ *есть* M*-множество для* d*-кратных рядов Уолша (для случая сходимости по прямоугольникам) тогда и только тогда, когда* E *есть* M*-множество для* $(d-1)$*-кратных рядов Уолша.*

Как построить "по существу" многомерные M-множества нулевой меры?

Н. Н. Холщевникова в работе 2013 года отмечает, что построенные таким образом M-множества меры нуль всегда будут иметь проекцию хотя бы на одну из координатных осей меры 1.

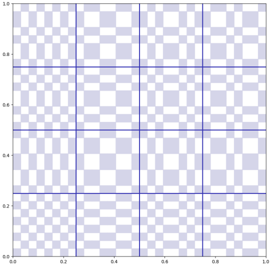
Вопрос, Н. Н. Холщевникова: о построении M-множества содержащегося, например, в квадрате $0 \leq x_1 \leq 1/2, 0 \leq x_2 \leq 1/2$.

Вопрос: о построении M-множества такого, что любое сечение k-мерной плоскостью, параллельной координатной, имеет k-мерную меру нуль, и при этом дополнение этого множества не является декартовым произведением.

Пусть $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d)$. Через $\Delta_{\mathbf{i}}^{(k)} = \left[\frac{i_1-1}{2^k}, \frac{i_1}{2^k}\right) \times \ldots \times \left[\frac{i_d-1}{2^k}, \frac{i_d}{2^k}\right)$ обозначим двоичный куб ранга k.

Конструкция M-множества

Пусть (m_s): $m_{s+1} \geq 2\cdot(2m_s+1)$. Множество $F = \cap_{s=1}^{\infty} F_s$. Каждый слой F_s— объединение "графиков" d-мерных функций Уолша $W_{\mathbf{n}}$, $2^{m_s} \cdot \mathbf{1} \leq \mathbf{n} \leq 2^{m_s+1} \cdot \mathbf{1} - 1$, сжатых до определенного куба ранга m_s: кубу $\Delta_{\mathbf{i}}^{(m_s)}$ соответствует функция Уолша с номером $2^{m_s} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{i}$.



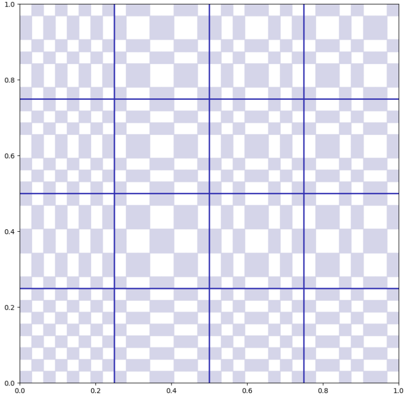
Множество F является непустым совершенным множеством нулевой меры.

Теорема

Множество F является M-множеством для системы Уолша при сходимости по прямоугольникам и повторной сходимости.

Всякая непустая порция множества F (т.е. $F \cap G$, где G —открыто) тоже является M-множеством.

О коэффициентах нуль-ряда



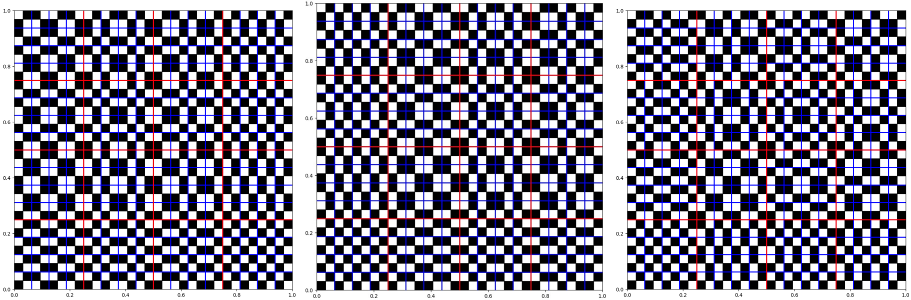
Теорема

Существует нуль-ряд $\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \tau_{\mathbf{n}} W_{\mathbf{n}}$, *который "реализует"* M*-множество* F *такой, что его коэффициенты сосредоточены около главной диагонали. Ненулевые коэффициенты есть только среди коэффициентов с номерами* $2^{2m_s} \cdot \mathbf{1} \leq \mathbf{n} \leq 2^{2m_s+1} \cdot \mathbf{1} - 1$ *и они по модулю равны* $\tau_{\mathbf{n}} = \frac{2^s}{2^{dm_s+1}}$.

Теорема

Если $\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \psi_{\mathbf{n}} W_{\mathbf{n}}$ *сходится к нулю по прямоугольникам или кубам вне множества* F *и* $\psi_{\mathbf{n}} = o(\tau_{\mathbf{n}})$ *при* $\max n^j \to \infty$, *то все* $\psi_{\mathbf{n}} = 0$.

О перестановке порций $F_s \cap \Delta_{\mathbf{m}}^{(m_s)}$ в слое



Теорема

Множество F будет оставаться M-множеством если в каждом слое переставлять порции $F_s \cap \Delta_{\mathbf{m}}^{(m_s)}$ вдоль координатных гиперплоскостей (подгруппа $(S_{2^{m_s}})^d$ в симметрической группе $S_{2^{dm_s}}$ перестановок всех кубов ранга m_s).

Известно и нетрудно получить, что

Любое множество положительной меры является M-множеством для одномерной системы Уолша, для тригонометрической системы.

Открытый вопрос (J. M. Ash, C. Freiling, D. Rinne, 1993, Н. Н. Холщевникова, 2002):

Всякое ли множество положительной меры является M-множеством для кратной системы Уолша, для кратной тригонометрической сисетмы?

U-множества — множества, которые не являются M-множествами.

(М.Г. Плотников, 2010) *Любое не более чем счётное множество является множеством единственности для системы Уолша при сходимости по кубам* (*по прямоугольникам* — В.А. Скворцов, 1973).

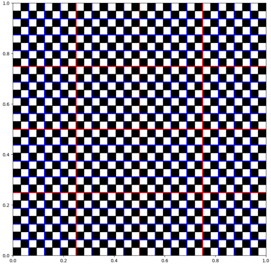
(С.Ф. Лукомский, 1992) Классы U-множеств при сходимости по прямоугольникам и по кубам не совпадают.

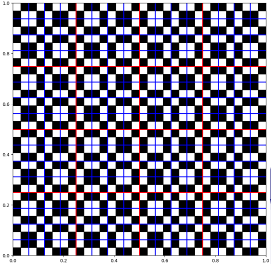
(Ш.Т. Тетунашвили, 1991) *Любое не более чем счётное множество является множеством единственности для тригонометрической системы при сходимости по прямоугольникам* (по кубам — неизвестно).

Открытый вопрос: Является ли пустое множество U-множеством для тригонометрической системы при сходимости по кубам?

(Гипотеза, J.M. Ash, G. Wang, 2007) Ответ отрицательный.

О совершенных U-множествах





(К. Йонеда, 1982) Множества Дирихле ($\exists\ \{n_j\}_{j=1}^{\infty}\colon F = \{t\colon W_{n_j}(t) = 1,\quad \forall j\}$) являются U-множествами для рядов Уолша.

(М.Г. Плотников, 2010) Множества типа Дирихле ($\exists\ \{k_j\}_{j=1}^{\infty}\colon F = \{\mathbf{t}\colon R_{k_j\cdot\mathbf{1}}(\mathbf{t}) = 1,\quad \forall j\}$) являются U-множествами для d-кратных рядов Уолша при сходимости по кубам.

Пусть слой F_s— объединение "графиков" одной и той же d-мерной функции Уолша с номером таким, что $2^{m_s}\cdot\mathbf{1} \le \mathbf{n} \le 2^{m_s+1}\cdot\mathbf{1} - 1$, сжатых до квадратов ранга m_s.

Теорема

Множество $F = \cap_{s=1}^{\infty} F_s$ является U-множеством при λ-сходимости при некотором $\lambda \in [1,2]$, а в некоторых случаях даже по кубам (если $\mathbf{n} = (2^{m_s} + i)\cdot\mathbf{1}$).

О НЕСУММИРУЕМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Кирюхина Алена Алексеевна

Дни анализа в Сириусе:
аппроксимация, оптимизация, восстановление данных и смежные вопросы
10-17 сентября 2025

Введение

Понятие орторекурсивного разложения было введено в 1999 г. Лукашенко Т.П., далее был доказан ряд свойств ОРР, но вопрос о суммируемости в терминах ОРР ранее не затрагивался.

Было доказано, что множители Вейля λ_k со свойством $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$ обеспечивают сходимость почти всюду орторекурсивного разложения функции, которое не сходятся к ней по норме.
Результат перенесен на методы суммирования, которые постоянную с некоторого номера последовательность суммируют к ее пределу.

Понятие орторекурсивного разложения

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $\{e_k\}$ — конечная или счетная система нормированных элементов H, последовательно занумерованная натуральными числами.

Определение

Орторекурсивное разложение (ОРР) элемента $f \in H$ по последовательности элементов $\{e_k\}$ осуществляется следующим образом:
1) положим $r_0 = f$;
2) если задан остаток приближения $r_{n-1} \in H, n \in \mathbb{N}$, и элемент e_n, то полагаем

$$\hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n); \;\; r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n. \tag{1}$$

Понятие орторекурсивного разложения

$$\hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n);\ \ r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n.$$

Назовем $\hat{f}_k$ *орторекурсивными коэффициентами Фурье* элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}$,
а ряд $\sigma(f) = \sum\limits_k \hat{f}_k e_k$ назовем *орторекурсивным рядом Фурье* элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}$,
а сумму $S_n(f) = \sum\limits_{k \leqslant n} \hat{f}_k e_k$ - *n-частичной суммой орторекурсивного ряда Фурье.*

Свойства ОРР

Для остатка верно: $r_n(f) = f - \sum_{k \leqslant n} \hat{f}_k e_k$.

Тогда для ортонормированной системы функций $\{e_k\}$ орторекурсивные коэффициенты Фурье являются обычными коэффициентами Фурье, а орторекурсивный ряд Фурье - обычным рядом Фурье.

Из (1) следует равенство Пифагора

$$||r_{n-1}||^2 = ||r_n||^2 + |\hat{f}_n|^2 \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$f = r_0 = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k + r_n \text{ и } ||f||^2 = ||r_0||^2 = \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_k|^2 + ||r_n||^2. \tag{3}$$

Свойства ОРР

Из (3) следует:

- аналог неравенства Бесселя $||f||^2 \geqslant \sum\limits_k |\hat{f}_k|^2$,
- $f = \sum\limits_k |\hat{f}_k|^2 \Leftrightarrow$ выполняется аналог равенства Парсеваля $||f||^2 = \sum\limits_k |\hat{f}_k|^2$,
- $||f|| = ||r_0|| \geqslant ||r_1|| \geqslant ||r_2|| \geqslant ||r_3|| \geqslant ||r_4|| \geqslant \ldots$

Теорема 1

Пусть f - единичный элемент ($||f|| = 1$) сепарабельного гильбертова пространства H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), а $\alpha_k > 0, k \in \mathbb{N}$, - такая числовая последовательность, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \nu,\ 0 < \nu \leqslant \frac{3}{4}$. Тогда найдется такая нормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в H, что орторекурсивное разложение элемента f по ней $\sum\limits_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k + r_n$ обладает следующими свойствами:

$$|\hat{f}_k| < \alpha_k,\ \frac{1}{2} < ||r_n|| < 1,\ \forall k, n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

и нормированная последовательность остатков $\frac{r_n}{||r_n||}$ всюду плотна на единичной сфере $S(0) = \{x \in H : ||x|| = 1\}$.

О расходимости почти всюду ОРР

Следствие

Орторекурсивное разложение элемента f из теоремы 1 не сходится в H и его ортогональная проекция (проекция всех его членов) на любое невырожденное подпространство H не сходится в этом подпространстве.

О расходимости почти всюду ОРР

Теорема 2

Рассмотрим сепарабельное пространство Лебега $L^2(\Omega)$ *и* λ_k *- такую строго положительную последовательность, что все* $\lambda_k \geqslant 1$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$, *тогда для любой функции* $f(x) \in L^2(\Omega), \|f(x)\| > 0$, *найдется такая нормированная последовательность функций* $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *что орторекурсивный ряд* $f(x)$ *по системе* $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *не сходится по норме пространства и не сходится поточечно почти всюду на* Ω, *при этом*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left|\hat{f}_k\right|^2 < \infty. \tag{5}$$

Матричные методы суммирования

Определение

Пусть дана последовательность $\{\sigma_m, m = 1, 2, \ldots\}$, $\sigma_m = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{m,k} S_k$. Тогда σ_m будем называть *средними ОРР матричного суммирования* $T = (c_{m,n})$.

Для метода выполняется:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{(m,n)} \longrightarrow 1 \quad$ при $\quad m \to \infty$;
- $\forall m \quad c_{(m,n)} \longrightarrow 0 \quad$ при $\quad n \to \infty$.

О несуммируемости почти всюду ОРР

Теорема 3

Пусть $T = (c_{m,n})$ *— матричный метод суммирования сформулированного выше типа, функция* f, $\|f\| = 1$, *— элемент сепарабельного гильбертова пространства* H *(над полем* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$*), а* $\alpha_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, *— такая неубывающая числовая последовательность, что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$, *а* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \nu$, $0 < \nu \leqslant \frac{3}{4}$. *Тогда найдется такая нормированная система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *в* H, *что орторекурсивное разложение элемента* f *по ней* $\sum\limits_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k + r_n$ *обладает следующими свойствами:*

если k_j *подпоследовательность, содержащая все номера с* $\hat{f}_k \neq 0$, *то*

$$|\hat{f}_{k_j}| < \alpha_j, j \in \mathbb{N},$$

при этом для всех остатков выполнено:

$$\frac{1}{2} < \|r_n\| < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

О несуммируемости почти всюду ОРР

Теорема 3

Также существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_j*, что* σ_{n_j}*, средние ОРР вышеуказанного матричного метода суммирования, таковы, что*

$$\frac{1}{2} < \|f - \sigma_{n_j}\| \leqslant 1$$

и нормированная последовательность $\dfrac{f - \sigma_{n_j}}{\|f - \sigma_{n_j}\|}$ *всюду плотна на единичной сфере* $S(0) = \{x \in H : \|x\| = 1\}$.

О несуммируемости почти всюду ОРР

Следствие

Орторекурсивное разложение элемента f из теоремы 3 не суммируется в H вышеуказанным методом суммирования и его ортогональные проекции на любые невырожденные подпространства H не суммируются данным методом в этих подпространствах.

Теорема 4

Рассмотрим сепарабельное пространство Лебега $L^2(\Omega)$ *и* λ_k *— такую неубывающую строго положительную последовательность, что все* $\lambda_k \geqslant 1$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$. *Тогда для любой функции* $f(x) \in L^2(\Omega)$, $\|f(x)\| > 0$, *и любого метода суммирования указанного типа, найдется такая нормированная последовательность функций* $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *что орторекурсивный ряд* $f(x)$ *по системе* $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *не суммируется данным методом суммирования по норме пространства и не суммируется поточечно почти всюду на* Ω, *при этом*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_{n_k}|^2 \cdot \lambda_k < \infty,$$

где $\hat{f}_{n_k}$ *— подпоследовательность всех отличных от нуля коэффициентов разложения.*

Теорема 5

Рассмотрим сепарабельное пространство Лебега $L^2(\Omega)$ *и* λ_k *— такую строго положительную последовательность, что все* $\lambda_k \geqslant 1$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$, *тогда для любой функции* $f(x) \in L^2(\Omega)$, $\|f(x)\| > 0$, *и любого метода суммирования указанного выше типа, найдется такая нормированная последовательность функций* $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *что орторекурсивный ряд* $f(x)$ *по системе* $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *не суммируется данным методом суммирования по норме пространства и не суммируется поточечно почти всюду на* Ω, *при этом*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \cdot \lambda_k < \infty. \tag{6}$$

Выводы

Полученные результаты доказывают, что без предположений о сходимости орторекурсивного разложения (в каком-либо смысле) невозможно получить результаты о сходимости или суммируемости ОРР. Сходимость орторекурсивного разложения к разлагаемому элементу естественна и выполняется для целого ряда систем, представляющих интерес с точки зрения теории и приложений.

Список использованных источников

1. Лукашенко Т.П. Рекурсивные разложения, подобные ортогональным. VII междунар. конф. Математика. Экономика. Экология. Образование. Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения. (26 мая - 1 июня 1999г.) Тезисы докл. Ростов-на-Дону: РГЭА, 1999.331.
2. Лукашенко Т.П. Об орторекурсивных разложениях по характеристическим функциям промежутков. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Матер. школы-конф., посв. 130-летию со дня рожд. Д.Ф.Егорова. Казань: изд-во "Казанск. мат. об-во". 1999. 142, 143.
3. Лукашенко Т.П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам. Вестн. Моск. ун-т. Сер. I. Матем. Механ. 2001. 1. 6–10.
4. Galatenko V.V., Lukashenko T.P., Sadovnichiy V.A. Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansions in Functional Systems. Advances in Dynamical Systems and Control. Studies in Systems, Decision and Control. V. 69. Springer International Publishing Switzerland 2016.3-11. Садовничий В.А. Избранные труды. Математика, механика и их приложения. Том 6. Издательство Московского университета, 2019. 200, 207.
5. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды – М.: изд-во АФЦ. 1999.
6. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов – М.: изд-во ИЛ. 1963.
7. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. – М.-Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“. 2009.
8. Knopp, Konrad Theory and application of infinite series. – New York: Dover Publications Inc. 1990.

Усиление теоремы Кавена–Поммеренке и его следствия

О.С. Кудрявцева

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Научная Конференция
«Дни анализа в Сириусе: аппроксимация, оптимизация, восстановление данных и смежные вопросы»
10 – 17 сентября 2025

$\mathscr{B}$ — совокупность голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D}$ в себя.

Если $f, g \in \mathscr{B}$, то $f \circ g \in \mathscr{B}$; в частности, $f^1 = f \in \mathscr{B} \Rightarrow f^n = f \circ f^{n-1} \in \mathscr{B}$.

Теорема Данжуа–Вольфа

Для любой $f \in \mathscr{B}$ отличной от дробно-линейного преобразования круга $\mathbb{D}$ на себя существует единственная точка $q \in \overline{\mathbb{D}}$ такая, что $f^n(z) \to q$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $n \to \infty$.

Точка Данжуа–Вольфа q функции f является *притягивающей неподвижной точкой*. Остальные неподвижные точки (если они есть) лежат на $\mathbb{T}$ и являются *отталкивающими*.

Теорема Жюлиа–Каратеодори

Пусть $f \in \mathscr{B}$, $f(a) = a$, $a \in \mathbb{T}$. Тогда

$$f'(a) := \angle \lim_{z \to a} \frac{f(z) - a}{z - a} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|a - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \frac{1 - |z|^2}{|a - z|^2}.$$

C.C. Cowen, Ch. Pommerenke, *"Inequalities for the angular derivative of an analytic function in the unit disk"*, J. London Math. Soc., 26:2 (1982), 271–289.

Пусть $f \in \mathscr{B}$, $f(q) = q$, $f(a_1) = a_1, \dots, f(a_n) = a_n$.

1. Если $q \in \mathbb{D}$, то
$$\left| f'(q) - \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(a_k)-1}}{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(a_k)-1}} \right| \leqslant \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(a_k)-1}}.$$

2. Если $q \in \mathbb{T}$, то
$$f'(q) \geqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(a_k) - 1} \right)^{-1} + 1 \right)^{-1}.$$

Теорема Жюлиа–Каратеодори *Пусть $f \in \mathscr{B}$, $f(a) = 1$. Тогда для любого $z \in \mathbb{D}$*
$$\frac{\bar{a}}{f'(a)} \frac{1 - |z|^2}{|a - z|^2} \leqslant \frac{1 - |f(z)|^2}{|1 - f(z)|^2}.$$

Теорема Кавена–Поммеренке
Пусть $f \in \mathscr{B}$, $f(a_1) = \dots = f(a_n) = 1$. Тогда для любого $z \in \mathbb{D}$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{a}_k}{f'(a_k)} \frac{1 - |z|^2}{|a_k - z|^2} \leqslant \frac{1 - |f(z)|^2}{|1 - f(z)|^2}.$$

Лемма

Пусть $f \in \mathscr{B}$, $f(a) = a$ *и* $f'(a) = \alpha > 1$. *Тогда функция*

$$g(z) = \frac{f(z) + \big(f(z) - z\big)\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{a}{a-z}}{1 + \big(f(z) - z\big)\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{a-z}}$$

удовлетворяет неравенству

$$|g(z)| \leqslant 1 \tag{1}$$

для всех $z \in \mathbb{D}$. *Если хотя бы при одном* $z \in \mathbb{D}$ *в* (1) *достигается равенство, то*

$$f_q(z) = \frac{q + z\,\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{a-q}{a-z}}{1 + \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{a-q}{a-z}}, \quad \text{где } q \in \mathbb{T} \setminus \{a\}.$$

При этом равенство в (1) *достигается при всех* $z \in \mathbb{D}$.

Если, в дополнение, $f(b) = b$, ***то*** $g(b) = b$, ***причем***

$$g'(b) = f'(b) + \frac{f'(b) - 1}{\alpha - 1}.$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{a + f(z)}{a - f(z)} - \frac{1}{f'(a)}\,\frac{a+z}{a-z}\right) \geqslant 0; \qquad e^{i\varphi}\frac{h(z) - u}{h(z) + \overline{u}} \in \mathscr{B}, \quad \text{где} \quad \operatorname{Re} u > 0.$$

Теорема 1

Пусть $f \in \mathscr{B}$, $f(a_k) = a_k$ *и* $f'(a_k) = \alpha_k > 1$, $k = 1, \ldots, n$. *Тогда функция*

$$g(z) = \frac{f(z) + \big(f(z) - z\big) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k - 1} \frac{a_k}{a_k - z}}{1 + \big(f(z) - z\big) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k - 1} \frac{1}{a_k - z}}$$

удовлетворяет неравенству

$$|g(z)| \leqslant 1 \tag{2}$$

для всех $z \in \mathbb{D}$. *Если хотя бы при одном* $z \in \mathbb{D}$ *в* (2) *достигается равенство, то*

$$f_q(z) = \frac{q + z \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k - 1} \frac{a_k - q}{a_k - z}}{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k - 1} \frac{a_k - q}{a_k - z}}, \quad \text{где } q \in \mathbb{T} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

При этом равенство в (2) *достигается при всех* $z \in \mathbb{D}$.

Если, в дополнение, $f(b) = b$, *то* $g(b) = b$, *причем*

$$g'(b) = f'(b) + \big(f'(b) - 1\big) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k - 1}.$$

Теорема 1′

Пусть $f \in \mathscr{B}$, $f(a_k) = a_k$ *и* $f'(a_k) = \alpha_k > 1$, $k = 1, \dots, n$. *Тогда для любого* $z \in \mathbb{D}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k - 1} \frac{|a_k - f(z)|^2}{|a_k - z|^2} \leqslant \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k - 1}\right) \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2} - \frac{|z - f(z)|^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(\alpha_k - 1)(\alpha_j - 1)} \frac{|a_k - a_j|^2}{|a_k - z|^2 |a_j - z|^2}.$$

При $n = 1$ получаем **теорему Жюлиа–Каратеодори**

$$\frac{|a - f(z)|^2}{|a - z|^2} \leqslant \alpha \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Теорема 1 при дополнительном (избыточном) условии $f(0) = 0$ эквивалентна **теореме Кавена–Поммеренке**.

Пусть $f \in \mathscr{B}$, $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = 1$.
Рассмотрим функцию $p(z) = zf(z)$. Тогда $p \in \mathscr{B}$, $p(a_1) = a_1, \ldots, p(a_n) = a_n$ и $p(0) = 0$.
По теореме 1 функция

$$g(z) = \frac{p(z) + \big(p(z) - z\big) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k - 1} \frac{a_k}{a_k - z}}{1 + \big(p(z) - z\big) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k - 1} \frac{1}{a_k - z}}$$

принадлежит классу $\mathscr{B}$ и $g(0) = 0$. Следовательно,

$$\frac{g(z)}{z} = \frac{f(z) + \big(f(z) - 1\big) \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{a}_k}{f'(a_k)} \frac{a_k}{a_k - z}}{1 + \big(f(z) - 1\big) \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{a}_k}{f'(a_k)} \frac{z}{a_k - z}} \in \mathscr{B}.$$

$$\operatorname{Re} \frac{1 + \frac{g(z)}{z}}{1 - \frac{g(z)}{z}} = \left(\frac{1 - |f(z)|^2}{|1 - f(z)|^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{a}_k}{f'(a_k)} \frac{1 - |z|^2}{|a_k - z|^2} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{a}_k}{f'(a_k)} \right)^{-1} \geqslant 0.$$

Следствия из теоремы 1

Пусть $f \in \mathscr{B}$, $f(a_k) = a_k$ *и* $f'(a_k) = \alpha_k > 1$, $k = 1, \ldots, n$.

- *найдена точная область значений функции* f *в произвольной точке единичного круга;*
- *получено точное неравенство для производной* f' *в произвольной точке единичного круга;*
- *найдены точные оценки для начальных тейлоровских коэффициентов.*

✐ О.С. Кудрявцева, *"Обобщение теоремы Жюлиа–Каратеодори на случай нескольких граничных неподвижных точек*, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр, (2025).

Периодические режимы в волновых колебаниях сетки из струн

Бурлуцкая М. Ш., Силаева М.Н.
(Воронежский государственный университет)

Научная конференция
«Дни анализа в Сириусе: аппроксимация, оптимизация, восстановление данных и смежные вопросы»

Международный математический центр «Сириус»,
10–17 сентября 2025 г.

Резольвентный подход в методе Фурье

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{R_\lambda^0 g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{R_\lambda g - R_\lambda^0 g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda,$$

$g = (L - \mu_0 E)\varphi$

———————

Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. // ДАН. 2014.

Задача на графе (сетка из струн одинаковой длины)

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - q_j(x)u_j(x,t) + f_j(x,t), \tag{1}$$

$$(j = 1, 2), \qquad (x,t) \in Q = [0,1] \times \in [0, +\infty),$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = u_2(1,t), \tag{2}$$

$$u'_{1x}(0,t) - u'_{1x}(1,t) + u'_{2x}(0,t) - u'_{2x}(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x), \\ u'_{1t}(x,0) = \psi_1(x), \quad u'_{2t}(x,0) = \psi_1(x) \end{aligned} \tag{4}$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Big[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t +$$

$$+R_\lambda(\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho} + \int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Big]\,d\lambda, \tag{5}$$

R_λ – резольвента оператора:

$$Ly = \left(-y_1''(x) + q_1(x)y_1(x), -y_2''(x) + q_2(x)y_2(x)\right)^T,$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0) = y_2(1), y_1'(0) - y_1'(1) + y_2'(0) - y_2'(1) = 0,$$

$\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Re}\rho \geq 0$, $r > 0$ и достаточно велико,
γ_n есть образ в λ – плоскости окружностей $\tilde{\gamma_n} = \{\rho \,|\, |\rho - n\pi| = \delta\}$,
$\delta > 0$ достаточно мало и фиксировано,
$R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по x.

Задача (A): $f_j(x,t) \equiv 0$, $\psi_j(x) \equiv 0$

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - q_j(x) u_j(x,t),$$
$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = u_2(1,t),$$
$$u'_{1x}(0,t) - u'_{1x}(1,t) + u'_{2x}(0,t) - u'_{2x}(1,t) = 0,$$
$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x), \quad u'_{1t}(x,0) = u'_{2t}(x,0) = 0$$

$$\text{Если } q_j(x) \equiv 0, \quad \text{то } u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{F}(x+t) + \widetilde{F}(x-t)\right),$$

где $\widetilde{F}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_1(-x) &= \tfrac{1}{2}[\widetilde{F}_1(1-x) + \widetilde{F}_2(1-x) - \widetilde{F}_1(x) + \widetilde{F}_2(x)],\\
\widetilde{F}_2(-x) &= \tfrac{1}{2}[\widetilde{F}_1(1-x) + \widetilde{F}_2(1-x) + \widetilde{F}_1(x) - \widetilde{F}_2(x)],\\
\widetilde{F}_1(1+x) &= \tfrac{1}{2}[\widetilde{F}_1(x) - \widetilde{F}_1(1-x) + \widetilde{F}_2(x) + \widetilde{F}_2(1-x)],\\
\widetilde{F}_2(1+x) &= \tfrac{1}{2}[\widetilde{F}_1(x) + \widetilde{F}_1(1-x) + \widetilde{F}_2(x) - \widetilde{F}_2(1-x)].
\end{aligned} \tag{П}$$

Задача (B): $q_j(x) \equiv 0$, $\varphi_j(x) \equiv 0$, $\psi_j(x) \equiv 0$

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} + f_j(x,t),$$
$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = u_2(1,t),$$
$$u'_{1x}(0,t) - u'_{1x}(1,t) + u'_{2x}(0,t) - u'_{2x}(1,t) = 0,$$
$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = 0, \quad u'_{1t}(x,0) = u'_{2t}(x,0) = 0$$

Если $f_j(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по x и t и удовлетворяют условиям (2)-(3),

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{F}(\eta,\tau)\, d\eta,$$

$\widetilde{F}(x,t) = f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t))^T$ при $x \in [0,1]$, и продолжается на всю ось с помощью соотношений (Π).

Задача (A): преобразование формального решения

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\, d\lambda, \qquad (6)$$

$$u(x,t) = U_0(x,t) + U_1(x,t).$$

Здесь $U_0(x,t)$ есть (6), где R_λ заменено на $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, L_0 есть оператор L при $q(x) = 0$.

$$U_0(x,t) = A_0(x,t) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{F}(x+t) + \widetilde{F}(x-t)\right),$$

$\widetilde{F}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$.
$A_0(x,t)$ — решение задачи (A) при $q_j(x) = 0$, и $\widetilde{F}(x)$ вместо $\varphi(x)$.

$U_1(x,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - Q(x)u(x,t) + F_0(x,t), \qquad (C)$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = u_2(1,t),$$

$$u'_{1x}(0,t) - u'_{1x}(1,t) + u'_{2x}(0,t) - u'_{2x}(1,t) = 0,$$

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = 0, \quad u'_{1t}(x,0) = u'_{2t}(x,0) = 0$$

с $F_0(x,t) = -Q(x)A_0(x,t)$.
Представим $U_1(x,t)$ в виде: $\quad U_1(x,t) = A_1(x,t) + U_2(x,t),$

$$A_1(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{F_0}(\eta,\tau)\,d\eta, \quad \widetilde{F_0}(x,t) = -\widetilde{Q}(x)A_0(x,t)$$

$U_2(x,t)$ — решение задачи (C) с $F_1(x,t) = -Q(x)A_1(x,t)$

Решение задачи (A)

Классическое решение существует и имеет вид

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t),$$

где $\quad A_0(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{F}(x+t) + \widetilde{F}(x-t)].$

$$A_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{F}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \quad n \geq 1$$

и $\widetilde{F}_n(x,t) = -\widetilde{Q}(x)A_n(x,t)$

$$\|A_n(x,t)\|_{C[Q_T]} \leq C\frac{M^{n-1}T^{n-1}}{(n-1)!}$$

Обозначим через $Z(x,t,\varphi)$ ряд (5) при $\psi_j(x) = f_j(x,t) = 0$. Из (5) получим представление:

$$u(x,t) = Z(x,t,\varphi) + \int\limits_0^t Z(x,\tau,\psi)\,d\tau + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta,f(\cdot,\tau))\,d\eta$$

(в случае суммируемого потенциала такое представление было предложено А. П. Хромовым с привлечением теории расходящихся рядов). При этом $Z(x,t,\varphi)$ есть решение задачи (1)–(4) при $\psi(x) = f(x,t) = 0$ (задачи (A)).

Отметим, что в задаче (А) для функции $\widetilde{F}(x)$, построенной по соотношениям (Π), справедливо:

Вектор-функция $\widetilde{F}(x)$ *дважды непрерывно дифференцируема на всей оси, является периодической с периодом 2,* $F(x+2) = F(x)$*, причем* $F(x) = \varphi(x)$ *при* $x \in [0, 1]$.

Случай графа с ребрами разной длины)

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{d_j^2}\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - q_j(x)u_j(x,t) + f_j(x,t);$$

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), i = 1,2;$$

$$u'_{it}(x,0) = 0, i = 1,2;$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = u_2(1,t);$$

$$a_1 u'_{1x}(0,t) + a_2 u'_{1x}(1,t) + a_3 u'_{2x}(0,t) + a_2 u'_{2x}(1,t) = 0;$$

Краевые условия регулярны по Биркгофу, если

$$a_3 d_2 - a_4 d_2 + a_1 d_1 - a_2 d_1 \neq 0,$$

Случай графа с ребрами разной длины

Требования на $\varphi(x) = \big((\varphi_1(x), \varphi_2(x)\big)^T$:

1. $\varphi_i(x) \in C^{(2)}[0,1]$;
2. $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0) = \varphi_2(1)$
3. $a_1\varphi_1'(0) + a_2\varphi_1'(1) + a_3\varphi_2'(0) + a_2\varphi_2'(1) = 0$;
4. $d_2^2\varphi_1''(0) = d_2^2\varphi_1''(1) = d_1^2\varphi_2''(0) = d_1^2\varphi_2''(1)$.

Задача при $q_j(x) \equiv 0$, $f_j(x,t) \equiv 0$

Теорема

Решение задачи при $q_j(x) \equiv 0$, $f_j(x,t) \equiv 0$, *имеет вид:*

$$u_i^0(x,t) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\varphi}_i(x + \frac{1}{d_i}t) + \widetilde{\varphi}_i(x - \frac{1}{d_i}t)\right), \quad i = 1,2$$

причем $\widetilde{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x)$ *при* $x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_1(-\frac{1}{d_1}t) = \frac{1}{C}\big(-2d_1a_2\widetilde{\varphi}_1(1-\frac{1}{d_1}t) - 2d_2a_4\widetilde{\varphi}_2(1-\frac{1}{d_2}t) + \\ \qquad +[d_1a_1 + d_1a_2 - d_2a_3 + d_2a_4]\widetilde{\varphi}_1(\frac{1}{d_1}t) + 2d_2a_3\widetilde{\varphi}_2(\frac{1}{d_2}t)\big); \\ \widetilde{\varphi}_2(-\frac{1}{d_2}t) = \frac{1}{C}\big(-2d_1a_2\widetilde{\varphi}_1(1-\frac{1}{d_1}t) - 2d_2a_4\widetilde{\varphi}_2(1-\frac{1}{d_2}t) + \\ \qquad +[-d_1a_1 + d_1a_2 + d_2a_3 + d_2a_4]\widetilde{\varphi}_2(\frac{1}{d_2}t) + 2d_1a_1\widetilde{\varphi}_1(\frac{1}{d_1}t)\big); \\ \widetilde{\varphi}_1(1+\frac{1}{d_1}t) = \frac{1}{C}\big(2d_2a_3\widetilde{\varphi}_2(\frac{1}{d_2}t) - 2d_2a_4\widetilde{\varphi}_2(1-\frac{1}{d_2}t) + \\ \qquad +[-d_1a_1 - d_1a_2 - d_2a_3 + d_2a_4]\widetilde{\varphi}_1(1-\frac{1}{d_1}t) + 2d_1a_1\widetilde{\varphi}_1(\frac{1}{d_1}t)\big); \\ \widetilde{\varphi}_2(1+\frac{1}{d_2}t) = \frac{1}{C}\big(2d_1a_1\widetilde{\varphi}_1(\frac{1}{d_1}t) - 2d_1a_2\widetilde{\varphi}_1(1-\frac{1}{d_1}t) + \\ \qquad +2d_2a_3\widetilde{\varphi}_2(\frac{1}{d_2}t) + [-d_1a_1 + d_1a_2 - d_2a_3 - d_2a_4]\widetilde{\varphi}_2(1-\frac{1}{d_2}t)\big), \end{cases}$$

где $C = a_3d_2 - a_4d_2 + a_1d_1 - a_2d_1$, *и* $\widetilde{\varphi}_j(x)$ *— дважды непрерывно дифференцируемы на* $(-\infty, +\infty)$.

Визуализация решений